



TITLE:

# 連続体とShapeについて (Shapeと無限次元多様体)

AUTHOR(S):

KOYAMA, AKIRA

---

CITATION:

KOYAMA, AKIRA. 連続体とShapeについて (Shapeと無限次元多様体). 数理解析研究所講究録 1979, 342: 19-27

ISSUE DATE:

1979-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104291>

RIGHT:

## 連続体と shape について

大阪教育大学 数学 小山 晃

0. 準備 連続体の *hyperspaces* の研究は古くから Hausdorff, Vietoris, Wojdyslawski などによつて行われていたが, Kelley [1] によつて Whitney map を用いる手法が考案され、著しい発展をみた。その後、大きな発展をみるには 1970 年代にまで至らねばならぬが、近年、Krasinkiewicz, Nadler, Rogers などによつて新たな発展の時期をみせている。この中で、連続体の *Hyperspaces* の研究に shape 理論を利用することは比較的少なく、思五-Spruz-渡辺 [2], Krasinkiewicz [4] などだけである。そこで、ここではある種の Whitney 連続体と shape との関係を調べる。

コンパクト距離空間  $X$  に対し、 $2^X$  は  $X$  のすべての閉部分集合から成る集合に Hausdorff 距離を導入した空間、 $C(X)$  は、 $X$  のすべての連結な閉部分集合から成る  $2^X$  の部分空間とする。この時、 $2^X$  はコンパクト距離空間、 $C(X)$  は  $2^X$  の閉部分空間とな

る。また、 $\hat{X} = \{\{x\} \in C(X) \mid x \in X\} \subset C(X)$  と表わすと、 $\hat{X}$  は  $X$  と等距離位相同型である。特に、 $X$  が連続体ならば、 $2^X$  及び  $C(X)$  は FAR ([2], [4]) であり、弧状連結 ([1]) でもある。

定義  $\Lambda = 2^X$  または  $C(X)$  とする。この時、次の条件を満たす連続写像  $\lambda: \Lambda \longrightarrow [0, +\infty)$  を Whitney map for  $\Lambda$  という。

(i) 任意の  $x \in X$  に対して、 $\lambda(\{x\}) = 0$

(ii) 任意の  $A, B \in \Lambda$ ,  $A \subsetneq B$  に対して、 $\lambda(A) < \lambda(B)$

特に、 $\Lambda = 2^X$  の時、 $\lambda = w$ ,  $\Lambda = C(X)$  の時  $\lambda = \mu$  と表わすことも多い。

$X$  が連続体の時には、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  は monotoneかつ開写像になる。よって、任意の  $t \in [0, \mu(X)]$  に対して、 $\mu^{-1}(t) \subset C(X)$  は  $C(X)$  の部分連続体になる。このような連続体  $\mu^{-1}(t) (t \in [0, \mu(X)])$  を  $X$  の Whitney 連続体という。

ここでは Kraunkiewicz によって示されているという次の結果を証明する ([6] 参照)。

定理 任意の  $S^1$ -like 連続体  $X$  と任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  に対して、

$$SH(X) = SH(\mu^{-1}(t)) \quad \text{for every } t \in [0, \mu(X)]$$

が成り立つ。

1. Whitney連続体の性質 定理を証明するために必要だと思われる Whitney 連続体の性質を掲げておく。

補題1 ([4])  $X$  が  $S^1$ -like 連続体ならば、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  に対し 2 次の二重成り立つ。

(1)  $X$  が snake-like ならば、任意の  $t \in [0, \mu(X))$  に対し、 $\mu^{-1}(t)$  も snake-like である。

(2)  $X$  が non-snake-like ならば、任意の  $t \in [0, \mu(X))$  に対し、 $\mu^{-1}(t)$  も non-snake-like かつ  $S^1$ -like である。

任意の連続体  $X$  と任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  に対し 2 次の二重成り立つ。

補題2 ([7]) 任意の  $t \in [0, \mu(X))$  と任意の  $A, B \in \mu^{-1}(t)$  に対し

2.  $A \cap B \neq \emptyset$  ならば、 $A$  と  $B$  を結ぶ arc  $\alpha$  が  $\mu^{-1}(t)$  に存在する。

[7] の証明には飛躍があるから、次のように証明する二重成り立つ。

証明  $A \cap B \neq \emptyset$  だから  $A \cap B$  の任意の連結成分  $K$  をとる。

この時、 $K \subset A \cap B$  だから  $\sigma_A(0) = K = \sigma_B(0)$ ,  $\sigma_A(1) = A$ ,  $\sigma_B(1) = B$  である線分 ([1])

$$\sigma_A: [0,1] \longrightarrow C(A), \quad \sigma_B: [0,1] \longrightarrow C(B)$$

が存在する。任意の  $t \in [0,1]$  に対し、 $\sigma_A(t) \cup \sigma_B(0) \subset A$ ,  
 $\sigma_A(t) \cup \sigma_B(1) \supset B$  である。

$$\mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(0)) \leq t_0 \leq \mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(1))$$

である。よって、 $\mu(\sigma_A(t) \cup \sigma_B(s(t))) = t_0$  となる  $s(t) \in [0,1]$  が存在する。よって、関数  $f: [0,1] \longrightarrow C(X)$  を、

$$f(t) = \sigma_A(t) \cup \sigma_B(s(t)) \quad \text{for every } t \in [0,1]$$

を定義する。この時  $f$  は明らかに連続である。また、定義から  $f(t) \in \mu^{-1}(t_0)$  ( $t \in [0,1]$ )、 $f(0) = B$  かつ  $f(1) = A$  である。すなわち、 $f$  は  $B$  と  $A$  を結ぶ path in  $\mu^{-1}(t_0)$  である。したがって、 $A$  と  $B$  を結ぶ arc  $\alpha$  in  $\mu^{-1}(t_0)$  が存在する。 (証明 終り)

補題 2 から次のことが成り立つ。

系 1 ([7])  $X$  は弧状連結な連続体であれば、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0,+\infty)$  と任意の  $t \in [0, \mu(X)]$  に対し、 $\mu^{-1}(t)$  は弧状連結な連続体である。

補題 3 任意の連続体  $X$  から  $S^1$  への任意の essential map  $f: X \longrightarrow S^1$  は weakly confluent である。

よって、任意の  $S^1$ -like 連続体  $X$  に対し、次の条件を満たす inverse sequence  $\{X_n, f_n, \mathbb{N}\}$  が存在する。

$$(i) \quad X = \varprojlim \{X_n, f_n, \mathbb{N}\}$$

(ii) おのれの  $n=1, 2, \dots$  に対し  $X_n = S^1$  かつ  $f_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$  は weakly confluent である。

よって、 $C(X) = \varprojlim \{C(X_n), C(f_n), \mathbb{N}\}$  かつ、おのれの  $n=1, 2, \dots$  に対し  $f_n$  によって誘導された連続写像  $C(f_n): C(X_{n+1}) \rightarrow C(X_n)$  は全射である。

そこで、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \rightarrow [0, +\infty)$  をとり、任意の  $x \in X$  と任意の  $t \in [0, \mu(x)]$  に対し

$$C_x^t = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid x \in A\} \subset \mu^{-1}(t)$$

を定義する。この時、上でみたことと補題 2 から次のことが成り立つ。

系 2. 任意の  $x \in X$  と任意の  $t \in [0, \mu(x)]$  に対し  $C_x^t$  は弧状連続である  $\mu^{-1}(t)$  の真部分連続体である。

2. 定理の証明 上半連続関数について次のように Vietoris-Begle type の定理が成り立つ。

補題 4 任意の整数  $n \geq 0$ ,  $X, Y$  をコンパクト Hausdorff 空間

とする。この時、ヒ半連続関数  $F: X \longrightarrow 2^Y$  について

$$(0) \bigcup_{x \in X} F(x) = Y$$

$$(1) \check{H}^k(F(x)) = 0 \quad \text{for every } x \in X, \quad 0 \leq k \leq n+1$$

$$(2) \check{H}^k(F^{-1}(y)) = 0 \quad \text{for every } y \in Y, \quad 0 \leq k \leq n$$

ただし、 $\check{H}^*$  は整数群を係数群とする reduced Čech cohomology theory,  $F^{-1}(y) = \{x \in X \mid y \in F(x)\} \subset X$  である。

ならば、 $F^*: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(X)$  は、 $0 \leq k \leq n$  のとき、同型写像、 $k = n+1$  のとき 1 対 1 準同型写像である。

証明.  $F$  はヒ半連続だから  $F$  のグラフ

$$G = \{(x, y) \in X \times Y \mid F(x) \ni y\} \subset X \times Y$$

は  $X \times Y$  の閉部分集合である。よって、 $G$  はコンパクト Hausdorff 空間である。自然な射影写像

$$p: G \longrightarrow X, \quad q: G \longrightarrow Y$$

とする。この時、任意の  $x \in X$  に対して、 $p^{-1}(x) = \{x\} \times F(x)$  だから条件 (1) と Vietoris-Begle の定理から  $p$  によって誘導された準同型写像  $p^*: \check{H}^k(X) \longrightarrow \check{H}^k(G)$  は  $0 \leq k \leq n+1$  のとき同型写像である。よって  $0 \leq k \leq n+1$  について

$$F^* = p^{*-1} \circ q^*: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(X)$$

を定義する。また、任意の  $y \in Y$  に対して、 $q^{-1}(y) = F^{-1}(y) \times \{y\}$  だから条件 (2) と Vietoris-Begle の定理から  $q$  によって誘導された準

同型写像  $\mathcal{F}^k: \check{H}^k(Y) \longrightarrow \check{H}^k(G)$  は  $0 \leq k \leq n$  のとき全射.

$0 \leq k \leq n+1$  のとき 1 対 1 である。

したがって、 $\mathcal{F}^k$  は  $0 \leq k \leq n$  のとき、同型写像、 $k = n+1$  のとき 1 対 1 準同型写像である。 (証明終り)

定理の証明. 最初に  $X$  が non-snake-like である場合を考える。  
この時、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  と任意の  $t \in [0, \mu(X))$  に対して補題 1(2) より  $\mu^{-1}(t)$  は non-snake-like な  $S^1$ -like 連続体である。よって  $t \in [0, \mu(X))$  に対して上半連続関数  $F_t: X \longrightarrow 2^{\mu^{-1}(t)}$  を

$$F_t(x) = C_x^t = \{A \in \mu^{-1}(t) \mid x \in A\} \quad \text{for every } x \in X$$

と定義する。この時  $F$  が補題 4 の条件 (0) を満たすことは明らかである。また、系 2 より任意の  $x \in X$  に対して  $F_t(x)$  は  $\mu^{-1}(t)$  の真部分連続体である。よって、 $\mu^{-1}(t)$  が  $S^1$ -like だから  $F_t(x)$  は acyclic である。すなわち補題 4 の条件 (1) を満たす。さらに任意の  $A \in \mu^{-1}(t)$  に対して  $F_t^{-1}(A) = A \subsetneq X$  である。よって、 $\mathbb{C}$  と同様に  $F_t^{-1}(A)$  も acyclic である。よって、補題 4 の条件 (2) が成り立つ。よって、補題 4 から

$$\mathcal{F}_t^k: \check{H}^k(\mu^{-1}(t)) \xrightarrow{\sim} \check{H}^k(X) \quad \text{for every } k=0, 1, 2, \dots$$

である。したがって、Mardesic-Segal [5] と同様に 1 2

$$Sh(X) = Sh(\mu^{-1}(t)) \quad \text{for every } t \in [0, \mu(X))$$



が成り立つことわかる。

次に  $X$  が snake-like である場合を考える。この時、任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  と任意の  $t \in [0, \mu(X))$  に対し 2 補題 1 (1) から  $\mu^{-1}(t)$  は snake-like である。また、 $\mu^{-1}(\mu(X)) = \{X\}$  である。1 から、2.

$$SH(X) = SH(\{x\}) = SH(\mu^{-1}(t)) \quad \text{for every } t \in [0, \mu(X)]$$

である。

(証明終り)

この定理から任意の  $S^1$ -like 連続体  $X$  について次のことが成り立つ。

系 3 任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  に対し、 $X$  が movable であれば、すべての Whitney 連続体  $\mu^{-1}(t)$  ( $t \in [0, \mu(X)]$ ) も movable である。また、 $X$  が non-movable ならば  $\mu^{-1}(t)$  ( $t \in [0, \mu(X)]$ ) も non-movable である。

よって、 $X$  が movable であるための必要十分条件は、ある  $t \in [0, \mu(X))$  に対し  $\mu^{-1}(t)$  が movable であることである。

系 4. 任意の Whitney map  $\mu: C(X) \longrightarrow [0, +\infty)$  に対し、 $X$  が planar であれば、 $\mu^{-1}(t)$  ( $t \in [0, \mu(X)]$ ) も planar である。また、 $X$  が non-planar であれば  $\mu^{-1}(t)$  ( $t \in [0, \mu(X)]$ ) も non-planar である。

## 参考文献

- [1] J.L. Kelley, Hyperspaces of a continuum, Trans. A.M.S., 52 (1942), 22-36.
- [2] Y. Kodama, S. Spiez and T. Watanabe, On shape of hyperspaces, Fund. Math., 100 (1978), 59-67.
- [3] J. Krasinkiewicz, Certain properties of hyperspaces, Bull. Acad. Pol., 21 (1973), 705-710.
- [4] —————, On the hyperspaces of snake-like and circle-like continua, Fund. Math., 83 (1974), 155-164.
- [5] S. Mardešić and J. Segal, Shapes of compacta and ANR-systems, ibid., 72 (1971), 41-59.
- [6] S.B. Nadler, Jr., Hyperspaces of sets, Marcel Dekker, New York, 1978.
- [7] J.R. Rogers, Jr., Whitney continua in the hyperspace  $C(X)$ , Pacific J. Math., 58 (1975), 569-584.